Formelsamling Matematikk 2

Sigurd Lundberg Olsen

12. mai 2020

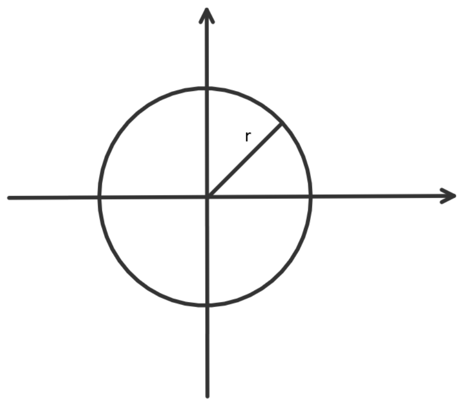
TMA4105
Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet

Innhold

1 Kjeglesnitt, parametrisering og polare koordinater 8.1-8.6

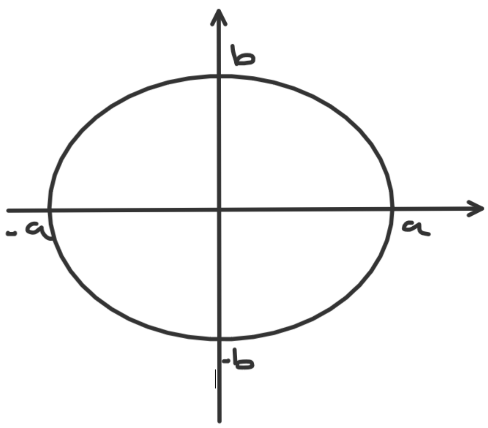
1.1 Viktige kjeglesnitt

<u>Sirkel</u>



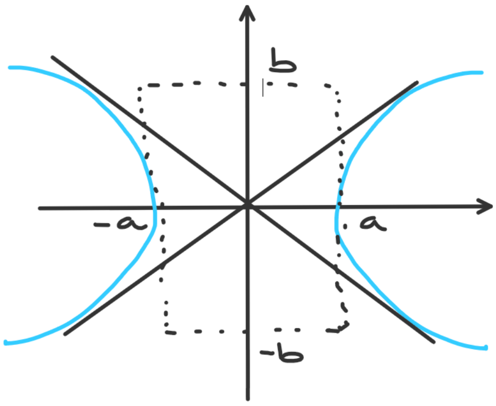
$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

<u>Ellipse</u>



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2 \tag{2}$$

<u>Hyperbel</u>



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

1.2 Def glatt kurve

En kurve C kalles glatt dersom den har en kontinuerlig varierende tangent

1.3 Buelengde

Buelengden av kurven y = h(x) for $a \leq x \leq b$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + h'(x)^2} dx \tag{4}$$

Buelengden for en **parametrisert** kurve $\vec{r}(t) = (f(t), g(t))$

$$s = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt \tag{5}$$

Buelengden til kurven gitt av **polarkoordinater** $r = f(\theta)$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta \tag{6}$$

1.4 Horisontal og vertikal tangent

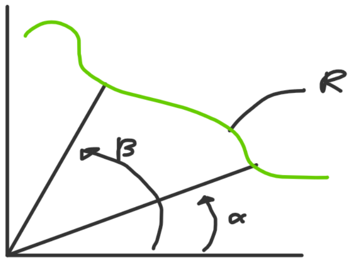
En kurve har **horisontal** tangent der y'(t) = 0 og x'(t) $\neq$ 0

En kurve har **vertikal** tangent der $x'(t) = 0$ og y'(t) $\neq$ 0

1.5 Areal bundet av kurver

Areal bundet av polarkoordinater

Areal av område avgrenset av r = f(θ) for $\alpha \leq \theta \leq \beta$



$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta \tag{7}$$

<u>Areal bundet av parametrisert kurve gitt ved $x = f(t), y = g(t)$</u>

Areal mellom kurven og **x-aksen**:

$$A = \int_a^b g(t)f'(t)dt \tag{8}$$

Areal mellom kurven og **y-aksen**:

$$A = \int_a^b g'(t)f(t)dt \tag{9}$$

*I tillegg må man legge på negativt fortegn om kurven traverseres **mot** klokken når t øker*

2 Vektorvaluerte funksjoner av én variable

2.1 Def vektorvaluert

En <u>vektorvaluert</u> funksjon er en funksjon som tar inn tall og spytter ut vektorer: $r(t) = (x(\vec{t}), y(t), z(t))$.

2.2 Hastighet

Dersom vi har en posisjonsvektor $r(\vec{t})$, er hastighetsvektoren $v(\vec{t}) = r'(\vec{t})$.

Farten er da $v(t) = |v(\vec{t})|$

2.3 Buelengde for vektorvaluerte funksjoner

$$s = \int_a^b |r'(\vec{t})|dt = \int_a^b |v(\vec{t})|dt \tag{10}$$

Buelengden er uavhengig av hvilken parametrisering vi bruker

2.4 Enhetstangent og enhetsnormal

Enhetstangenten finnes ved

$$\hat{T(t)} = \frac{\vec{v(t)}}{v(t)} \tag{11}$$

Enhetsnormalen finnes ved

$$\hat{N(t)} = \frac{\hat{T'(t)}}{|\hat{T'(t)}|} \tag{12}$$

Merk: *enhetsnormalen står ortogonalt (90 grader) på enhetstangenten*

2.5 Krumning

Krumningen finnes ved

$$k(t) = \frac{1}{v(t)} * |\hat{T'(t)}| \tag{13}$$

3 Flervariabelfunksjoner

3.1 Def nivåkurve

For et tall c $\in$ Vf kalles kurven gitt ved $f(x, y) = c$ i xy-planet nivåkurven til f i høyde c

3.2 Def kontinuitet

Funksjonen f(x,y) er kontinuerlig i (a,b) dersom

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b) \tag{14}$$

Bruker dette til å finne grenseverdier. Dersom grenseverdien <u>ikke</u> eksisterer, kan vi sjekke langs koordinataksene

Ofte går man over til polarkoordinater. Resultatet må da være uavhengig av θ for at **grenseverdien** skal eksistere

3.3 Def harmonisk funksjon

En funksjon f(x,y) kalles **harmonisk** dersom den oppfyller ligningen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ for alle punkter i xy-planet

3.4 Finne normalvektor

Normalvektor til $z = f(x, y)$ i punktet $(a, b, f(a, b)$ finnes ved:

$$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1) \tag{15}$$

3.5 Finne tangentplan

Tangentplanet til $z = f(x, y)$ i punktet $(a, b, f(a, b))$ finnes ved:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) * (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) * (y - b) \tag{16}$$

3.6 Finne minste avstand fra punkt til plan

Formel fra R2(lettere enn å bruke lagranges)

For et plan $ax + by + cz = d$ og et punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ er det minste avstanden fra punktet til planet gitt ved:

$$l = |\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}| \tag{17}$$

3.7 Kjerneregler

Gitt f(x,y) der x og y er funksjoner av t. Definerer $g(t) = f(x(t), y(t))$. Kjerneregelen sier da at:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{18}$$

Gitt $h(r, s) = f(x(r, s), y(r, s))$. For **dobbel** flervariable er kjerneregelen:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial z \partial x}{\partial x \partial r} + \frac{\partial h \partial y}{\partial y \partial r} \tag{19}$$

og

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h \partial x}{\partial x \partial s} + \frac{\partial z \partial y}{\partial y \partial s} \tag{20}$$

3.8 Gradient

Gradienten til f(x,y,z) er:

$$\nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \tag{21}$$

Teorem

Hvis f(x,y) er deriverbar i punktet (a,b) og $\nabla f(a,b) \neq 0$, så er $\nabla f(a,b)$ en **normalvektor til nivåkurven** til f som går gjennom (a,b)

3.9 Lineærisering

Lineæriseringen av $f(\vec{x})$ i punktet $\vec{a} = Df$ er:

$$L(x) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) * (\vec{x} - \vec{a}) \tag{22}$$

Kan brukes til å finne ligningen for tangentplan

3.10 Retningsderivert

Hvis $f : Df \to R$ er deriverbar i $\vec{a} \in Df$, så er den **retningsderiverte** $D\vec{u}f(\vec{a})$:

$$D\vec{u}f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) * \vec{u} \tag{23}$$

der $\vec{u}$ er en retningsvektor med lengde 1

3.11 Implisitt funksjonsteorem

Har $f(a,b) = C$ og $\nabla f(a,b) \neq \vec{0}$. Hvis $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ så er nivåkurven til $f(x,y) = C$ grafen til en funksjon $y = g(x)$ nær (a,b)

4 Ekstremalverdier for funksjoner av flere variabler

4.1 Definisjoner for ekstremalverdier

<u>Kritisk punkt</u>

Et **kritisk punkt** $\vec{p}$ er et punkt hvor $\nabla f(\vec{p}) = \vec{0}$

<u>Randpunkt</u>

Et **randpunkt** er et endepunkt

Singulært punkt

Et **singulært punkt** er et punkt hvor $\nabla f(\vec{p})$ ikke eksisterer

Sadelpunkt

Et **sadelpunkt** er et kritisk punkt som hverken er max eller min

4.2 Ekstremalverdier

Dersom f er kontinuerlig på Df så kan f ha **lokale** eller **gloable** ekstremalverdier i:

1. Kritisk punkt
2. Singulært punkt
3. Randpunkt

4.3 Andrederiverttesten i to variable

La f(x,y) være en funksjon av 2 variable. La $(a, b) \in Df$ være et indre kritisk punkt og anta at de andrederiverte er kontinuerlig i nærheten av (a,b). Sett:

- $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$
- $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b$
- $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$
- $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$

Da gjelder:

1. Hvis D < 0, så er (a,b) et **sadelpunkt**
2. Hvis D > 0 og A > 0 så er (a,b) et **lokalt minimum**
3. Hvis D > 0 og A < 0, så er (a,b) et **lokalt maksimum**

Hvis D = 0, gir testen ***ingen konklusjon***

Triks: Partiellderiver den letteste og velg punkter som gir $A * B = 0$

4.4 Lagranges multiplikatormetode

La f og g være kontinuerlige funksjoner av 2 variable og la C betegne kurven i planet definert ved $g(x, y) = 0$. La $P_0 = (x_0, y_0)$ være et punkt på C med $\nabla g(P_0) \neq \vec{0}$ Dersom:

- f og g har kontinuerlige partiellderiverte i nærheten
- P_0 ikke er endepunkt av C
- P_0 er lokalt max/min for f

så finnes det et tall λ slik at:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda * \nabla g(x_0, y_0) \tag{24}$$

,altså at ∇f er parallell med ∇g

Bruker dette til å finne lokale max- og min-punkter

5 Multiple integraler

5.1 Definisjoner for multiple integraler

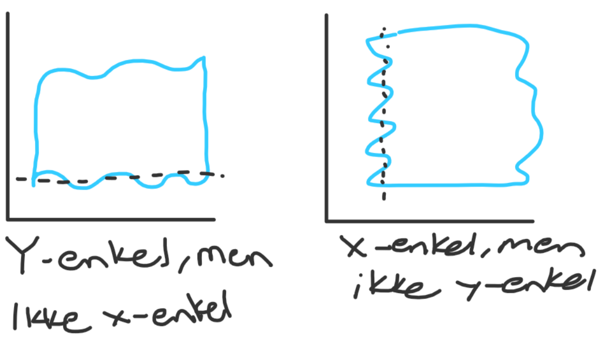
Merk: *Det vanskeligste er ofte å finne grensene*

X-enkel

Et område er x-enkelt om enhver linje parallell med x-aksen kun vil gi ett segment i området

Y-enkel

Et område er y-enkelt om enhver linje parallell med y-aksen kun vil gi ett segment i området



Om området er x-enkelt, y-enkelt eller begge bestemmer hvilken variabel vi må integrere med hensyn på først:

Teorem

La f være et kontinuerlig på et område D som er lukket og begrenset. Vi har 3 tilfeller:

- D er **y-enkel** og f må integreres med hensyn på y først
- D er **x-enkel** og f må integreres med hensyn på x først
- D er både x-enkel og y-enkel, og det er det samme hvilken variabel vi starter med

Hvis D er **y-enkel** må det integreres med hensyn på y først. Hvis D er **x-enkel** må det integreres med hensyn på x først.

5.2 Gjennomsnitt av funksjon

Gjennomsnittet av f(x,y) på D er gitt ved:

$$\frac{1}{\iint_D dA} \iint_D f(x,y)dA \tag{25}$$

5.3 Variabelskifte og koordinattransformasjon

En **koordinattransformasjon** fra uv-planet til xy-planet er slik at $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)$.

Et eksempel på en koordinattransformasjon er polare koordinater.

5.3.1 Jacobi-determinant, 2 variable

Definerer variablene $u(x,y)$ og $v(x,y)$. Regner først ut $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{26}$$

Jacobi-determinanten regnes da ut ved:

$$J(u,v) = \frac{1}{(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)})} \tag{27}$$

Jacobi-determinanten beskriver forholdet mellom arealelementer i xy og uv-planet

Resultat: $dA = dxdy = J(u,v)dudv$

5.3.2 Jacobi-determinant, 3 variable

For 3 variable blir **Jacobi-determinanten**:

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z}{\partial(u,v,w)} \tag{28}$$

Resultat: $dv = dxdydz = J(u,v,w)dudvdw$

5.4 Sylinderkoordinater

Ved variabelbytte til sylinderkoordinater får vi:

$$\iiint_D f(x,y,z)dzdydx = \iiint_S f(rcos(\theta), rsin(\theta), z)rdrzdrd\theta \tag{29}$$

Merk: Her er r Jacobi-determinanten

Krever at $r \leq 0$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$

5.5 Kulekoordinater

Ved variabelbytte til kulekoordinater får vi:

$$\iiint_D f(x,y,z)dzdydx = \iiint_S f(\rho sin(\phi)cos(\theta), \rho sin(\phi)sin(\theta), \rho cos(\phi))\rho^2 sin(\phi)d\rho d\phi d\theta \tag{30}$$

Merk: Her er $\rho^2 sin(\phi)$ Jacobi-determinanten

5.6 Masse

Massen av et legeme med **massetetthetsfunksjon** $\delta(x,y,z)$ er gitt ved:

$$m = \iiint_T dm = \iiint_T \delta(x,y,z)dV \tag{31}$$

5.7 Massesenter

Massesenteret til T er punktet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ hvor:

- $\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T xdm$
- $\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T ydm$

- $\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T z dm$

*Dersom $\delta(x, y, z) = 1$, kalles massesenteret **sentroiden** til T*

5.8 Merknad

Integral av uavhengige variable kan deles opp

Eks:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{1}^{3} r \sin(phi) \cos(\theta) r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta \int_{0}^{\pi} \sin(\phi)^2 d\phi \int_{1}^{3} r^3 dr \tag{32}$$

6 Vektorvaluerte funskjoner av flere variable

6.1 Definisjoner

Vektorfelt

En funksjon som tar inn variabler og gir ut en vektor kalles et **vektorfelt**. Et vektorfelt er **glatt** om alle komponentene har kontinuerlige partielle deriverte av alle ordener

Skalarfelt

En funksjon som tar inn variabler og gir ut en skalar kalles et **skalarfelt**.

6.2 Gradientfelt

Til et skalarfelt finnes det et tilhørende **gradientfelt** $\nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.

***Gradientfeltet** angir retningen der skalarfeltet endrer seg raskest.*

6.3 Feltlinjer

Gitt et vektorfelt $\vec{F}$ er **feltlinjene** de kurvene som tangerer feltet i alle punkter langs kurven. Feltlinjnene er gitt ved differensialligningene:

$$\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)} \tag{33}$$

6.4 Konservativt vektorfelt

Et vektorfelt er **konservativt** dersom $\vec{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$, der ϕ kalles en *potensial* til $\vec{F}$.

Teorem

Gitt et **konservativt** vektorvelt $\vec{F}$ i *to* dimensjoner, så er $\frac{\partial}{\partial y}F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F_2(x,y)$ for alle punkter (x,y) i området.

I *tre* dimensjoner så er $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y) = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y)$ for alle punkter (x,y,z) i området.

6.5 Linjeintegral

Et **linjeintegral** er et integral av en funksjon langs en kurve.

6.5.1 Type 1: linjeintegral langs kurve

Gitt en parametrisering $r\vec{(t)}$ av kruven C:

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(r\vec{(t)})|r'\vec{(t)}|dt \tag{34}$$

Viktig å huske her er at $ds = |r'\vec{(t)}|dt$

6.5.2 Type 2: linjeintegral av vektorfelt

Gitt et kontinuerlig vektorfelt $\vec{F}$ og en glatt kurve C:

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \int_C \vec{F}\hat{T}ds = \int_C F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz \tag{35}$$

6.5.3 Linjeintegral av *konservativt* vektorfelt

Gitt et *konservativt* vektorfelt der man kjenner *potensialet* ϕ, så er linjeintegralet av $\vec{F}$ langs en kurve C som starter i A og slutter i B gitt ved:

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A) \tag{36}$$

6.6 Nyttige arealelementer

6.6.1 På en sfære

Gitt radius $R = a$ er arealelementet $dS = a^2 \sin(\phi)d\phi d\theta$

6.6.2 På en sylinder

Gitt en sirkulær sylinder parallell med z-aksen med radius $r = a$ er arealelementet $dS = ad\theta dz$

6.7 Linjeintegral uavhengig av vei

Teorem

La $\vec{F}$ være et glatt vektorfelt på det åpne, enkeltsammenhengende området D. Da er følgende 3 utsagt ekvivalente:

- $\vec{F}$ er konservativ i D
- $\oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0$ for alle stykkvis glatte, lukkede kurver C i D
- $\oint_C \vec{F} d\vec{r}$ har samme verdi for alle stykkevis glatte kurver C som forbinder to punkter P_0 og P_1

7 Flate- og fluksintegraler

7.1 Definisjoner

<u>Parametrisk flate</u>

En **parametrisk flate** er en kontinuerlig funksjon $\vec{r}(u, v)$ på et lukket, begrenset og sammenhengende område.

<u>Glatt flate</u>

En flate er **glatt** dersom den har et veldefinert tangentplan i alle punkter - untatt på randen.

Normalvektor til planet er det samme som normalvektoren til flaten

<u>Orienterbar flate</u>

En glatt flate S kalles **orienterbar** dersom det finnes et enhetsvektorfelt $\hat{N}(P)$ som er definert for alle $P \in S$ som er kontinuerlig på S og står normalt på S. Vektorfeltet definerer en orientering av flaten S slik at den siden $\hat{N}$ peker ut av kalles positiv side, mens den andre siden av S kalles negativ.

Orienteringen er alltid slik at flaten er til venstre når man går i orienteringen (Bruk høyrehåndsregelen der tommelen din er $\hat{N}$. Da peker de andre fingrene i orienteringen.

7.2 Flateintegral over parametrisk flate

Flateintegralet av $f(\vec{r})$ over den parametriske flaten S gitt ved $\vec{r}(u, v)$ for $(u, v) \in D$ er:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}| dudv \tag{37}$$

Her er $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|$ ***normalvektoren*** *til den parametriske flaten S.*

Merk: $dS = |\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}|dudv$

7.2.1 Spesialtilfelle: z = g(x,y)

$$\iint_S f dS = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + \frac{\partial g}{\partial y})^2} dxdy \tag{38}$$

7.2.2 Spesialtilfelle: G(x,y,z) = 0

For en flate gitt ved $G(x, y, z) = 0$ som har en en-til-en projeksjon ned i xy-planet, har vi at:

$$\iint_S f dS = \iint_D |\frac{\nabla G(x, y, z)}{G_3}| dxdy \tag{39}$$

7.2.3 Spesialtilfelle: $f = 1$

Dersom $f = 1$ har vi at $\iint_S f dS = Areal(S)$

7.3 Fluksintegral

Gitt et vektorfelt $\vec{F}$. **Fluksen** av $\vec{F}$ gjennom den *orienterte* flaten S er da gitt ved:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}\hat{N} dS = \pm \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v))(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}) dudv \tag{40}$$

Husk: $\hat{N} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ *og* $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, -1)$

Merk: *fortegnet bestemmes av orienteringen til S for alle fluksintegraler!*

7.4 Fluks gjennom $G(x, y, z) = 0$

Dersom flaten S er gitt ved $G(x, y, z) = 0$ og har en en-til-en projeksjon i xy-planet, så er fluksen til $\vec{F}$ gitt ved:

$$\iint_S \vec{F} ds = \pm \iint_D \vec{F} \frac{\nabla G}{G_3} dxdy \tag{41}$$

Fortegnes bestemmes av orienteringen til S

7.5 Fluks gjennom $z = f(x,y)$

Dersom flaten S er gitt ved ligningen $z = f(x,y)$ for $(x,y) \in D$, så er fluksen av $\vec{F}$ gjennom S gitt ved:

$$\iint_S \vec{F}\hat{N}dS = \pm \iint_D \vec{F}(x,y,z)(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)dxdy \tag{42}$$

Fortegnet *settes til pluss dersom man ønsker fluksen opp gjennom flaten, og minus dersom man ønsker fluksen ned gjennom flaten*

8 Divergens og Curl

8.1 Divergens

8.1.1 Tolkning av divergens

Divergensen til et vektorfelt er et mål på spredning, f.eks av gass eller væske.

Divergensen til et vektorfelt er et skalarfelt

8.1.2 Divergens i R^2

Gitt et vektorfelt $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z))$ er **divergensen** $div(\vec{F})$ gitt ved:

$$div(\vec{F}) = \nabla * \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \tag{43}$$

8.1.3 Divergens i R^3

Gitt et vektorfelt $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ er **divergensen** $div(\vec{F})$ gitt ved:

$$div(\vec{F}) = \nabla * \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{44}$$

8.1.4 Def solenoidal

Et vektorfelt $\vec{F}$ er **solendoidalt** i et område D dersom $div(\vec{F}) = 0$ i D

8.2 Curl

8.2.1 Tolkning av curl

Curl beskriver rotasjonen av et vektorfelt. Retningen til curl($\vec{F}$) angir den aksen vi har størst rotasjon rundt, mens lengden til curl($\vec{F}$) er et mål på styrken av rotasjonen.

Curlen til et vektorfelt gir et nytt vektorfelt

8.2.2 Curl i R^3

Gitt et vektorfelt $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ er **curlen** $curl(\vec{F})$ gitt ved:

$$curl(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \tag{45}$$

8.2.3 Curl i R^2

For et vektorfelt $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ er curlen definert ved:

$$curl(\vec{F}(x,y)) = (0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \tag{46}$$

8.2.4 Def Rotasjonsfritt

Vi sier at et vektorfelt $\vec{F}$ er **rotasjonsfritt** i et område D dersom $curl(\vec{F}) = \vec{0}$.

8.3 Regneregler for divergens og curl

De to viktigste regnereglene er:

- $Div(Curl(\vec{F})) = 0$.
- $Curl(\nabla\phi) = \vec{0}$

der $\nabla\phi$ er gradienten til ϕ

8.3.1 Laplaceoperatoren

Vi betegner ofte $div(\Delta f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ som $\delta f = \nabla^2 f$, der $\Delta = \nabla^2$ kalles **Laplaceoperatoren**.

8.3.2 Merknader

- Et konservativt vektorfelt er curl-fritt ($Curl(\vec{F}) = \vec{0}$
- Et vektorfelt på formen $\vec{F} = curl(\vec{G})$ er divergensfritt ($div(\vec{F}) = 0$

Disse merkandene resulterer i 2 teoremer:

Teorem

Anta at $\vec{F}$ er et glatt, **curl-fritt** vektorfelt definert på et enkeltsammenhengende område D. Da finnes det en potensialfunksjon ϕ slik at $\vec{F} = \nabla\phi$ er et **konservativt** vektorfelt.

Teorem

Anta at $\vec{F}$ er et gatt **divergensfritt** vektorfelt på et område D, der D har egenskap at enhver flate i D avgrenser et område inneholdt i D. Da er $\vec{F} = curl(\vec{G})$ for et vektorfelt $\vec{G}$ definert på D. Vi kaller et slikt vektorfelt $\vec{G}$ for en **vektorpotensial**

8.4 Greens teorem

La R være et regulært lukket område i xy-planet med en randkurve C som består av en eller flere stykkvis glatte enkle lukkede kurver med posistiv orientering i forholdtil R. Dersom $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ er et glatt vektorfelt på R, gjelder:

$$\iint_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dA = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_C \vec{F}d\vec{r} \tag{47}$$

$\oint$ *er integrasjon omkring lukket kurve*

8.5 Divergensteoremet

Divergensteoremet brukes ofte til å finne fluksen til et vektorfelt gjennom en overflate.

Merk: *Det er ofte lurt å lage en skisse*

8.5.1 Divergensteoremet i planet

La R være et regulært, lukket område i xy-planet som er avgrenset av den stykkvis glatte enkle lukkede kurven C. La $\hat{N}$ betegne den utoverrettede normalen til C. Gitt et glatt vektorfelt $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y)$ gjelder:

$$\iint_R div(\vec{F})dA = \oint_C \vec{F}\hat{N}dS \tag{48}$$

8.5.2 Divergensteoremet i rommet

La D være et regulært område som er avgrenset av den orienterte, lukkede flaten S med utoverrettet enhetsnormal $\hat{N}$. Gitt et glatt vektorfelt $\vec{F}$ gjelder:

$$\iiint_D div(\vec{F})dV = \oiint_S \vec{F}\hat{N}dS \tag{49}$$

Merk: *$\iiint_D div(\vec{F})dV = \oiint_S \vec{F}\hat{N}dS$ er det samme som* ***fluks***

8.6 Stokes teorem

La S være en stykkvis glatt orientert flate i rommet med enhetsnormal $\hat{N}$ og rand C som består av en eller flere stykkvis glatte lukkede kurver med orientering tatt fra S. Dersom $\vec{F}$ er et glatt vektorfelt definert på en åpen mengde som inneholder S gjelder:

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_S curl(\vec{F})\hat{N}dS \tag{50}$$

Merk: *Det er ofte lurt å lage en skisse*

8.6.1 Kurve C i plan

Har vi et plan $ax + by + cz = d$ som kurven C ligger i, er $\hat{N}dS = (a, b, c)\,dxdy$