TMA4105 Matematikk 2
Løsningsforslag

Eksamen 23. mai 2017

$\boxed{1}$ I vårt tilfelle er $\mathbf{r}'(t) = (2t, 8t, -12t) = 2t(1, 4, -6)$ slik at $|\mathbf{r}'(t)| = 2t\sqrt{53}$. Dermed er buelengden til C gitt ved

$$s = \int_1^2 |\mathbf{r}'(t)|\,dt = 2\sqrt{53}\int_1^2 t\,dt = 3\sqrt{53}.$$

$\boxed{2}$ La $F(x,y,z) = 4(x-1)^2 + y^2 - (z+1)^2 - 1$. Da er

$$\nabla F(x,y,z) = \big(8(x-1), 2y, -2(z+1)\big)$$

slik at $\nabla F(0,\sqrt{6},2) = (-8, 2\sqrt{6}, -6)$. Siden $\nabla F(0,\sqrt{6},2)$ står normalt på nivåflaten $F(x,y,z) = 0$ i punktet $(0,\sqrt{6},2)$ har vi at

$$\nabla F(0,\sqrt{6},2)\cdot(x, y-\sqrt{6}, z-2) = -8x + 2\sqrt{6}(y-\sqrt{6}) - 6(z-2) = 0.$$

Det vil si, en ligning for tangentplanet til $F(x,y,z) = 0$ i punktet $(0,\sqrt{6},2)$ er gitt ved

$$4x - \sqrt{6}y + 3z = 0.$$

$\boxed{3}$ Siden $h(t) = \ln t$ for $t > 0$ er en strengt voksende funksjon, er det kun nødvendig å finne den minste og den største verdien til $g(x,y) = 3 + 2xy$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, for å finne den minste og den største verdien til f på samme sirkel.

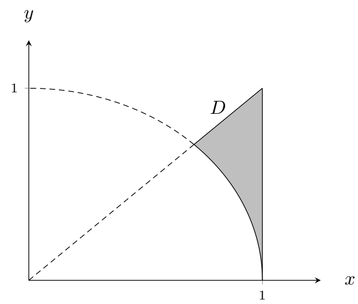
En parametrisering av sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

der $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. La $g(t) = g(\mathbf{r}(t)) = 3 + 2\cos t\sin t = 3 + \sin 2t$, der $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Siden $-1 \leqslant \sin 2t \leqslant 1$ for alle $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ må den minste verdien til $g(t)$ være lik $3 - 1 = 2$ og den største verdien til $g(t)$ være lik $3 + 1 = 4$.

Altså er den minste verdien til $f(x,y)$ lik $\ln 2$ og den største verdien til $f(x,y)$ lik $\ln 4 = 2\ln 2$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

$\boxed{4}$ Området D er skissert i figuren til høyre.



La så $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ slik at linjen $y = x$ svarer til $\theta = \pi/4$ og linjen $x = 1$ svarer til $r = 1/\cos\theta$. Området D kan dermed beskrives som området gitt ved

$$1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{og} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

i polarkoordinater.

Altså er

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/4}\int_1^{1/\cos\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2} r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} (1-\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ La $u = x^2 - y^2$ og $v = xy$. Jacobideterminanten er så gitt ved

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2+y^2)$$

slik at

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

for $x^2 + y^2 \neq 0$. Området D kan beskrives ved $1 \leqslant u \leqslant 4$ og $3 \leqslant v \leqslant 5$ i uv-planet.
Legg merke til at $2(x^4 - y^4) = 2(x^2+y^2)(x^2-y^2)$ slik at

$$2(x^4 - y^4)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 2(x^2+y^2)(x^2-y^2)\frac{1}{2(x^2+y^2)} = x^2 - y^2 = u.$$

Dermed er

$$\iint_D 2(x^4-y^4)\,dx\,dy = \int_3^5\int_1^4 2(x^4-y^4)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_3^5\int_1^4 u\,du\,dv = 15.$$

$\boxed{6}$ Ved å innføre kulekoordinater følger det at $x^2+y^2+z^2 = 2z$ svarer til $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$ og $z = \sqrt{x^2+y^2}$ svarer til $\rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi$.
Altså er integrasjonsområdet beskrevet ved

$$0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{og} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

i kulekoordinater. Volumet som ligger under kuleflaten $x^2+y^2+z^2 = 2z$ og over kjeglen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ er så gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi \\ &\overset{(*)}{=} -\frac{16\pi}{3}\int_1^{1/\sqrt{2}} u^3\,du = \frac{4\pi}{3}\left[u^4\right]_{1/\sqrt{2}}^1 = \pi, \end{aligned}$$

der $(*)$ fremkommer ved å benytte substitusjonen $u = \cos\varphi$.

$\boxed{7}$ Legg merke til at $z = x^2 - 2x + y^2 = (x-1)^2 - 1 + y^2$.
En mulig parametrisering for flaten $\mathcal{S}$ er gitt ved

$$\mathbf{r}(r,\theta) = \left(1 + r\cos\theta, r\sin\theta, r^2 - 1\right)$$

der $0 \leqslant r \leqslant 2$ og $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Det gir at

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 2r) \quad \text{og} \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}(r,\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

slik at

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right)(r,\theta) = \left(-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r\right) = r(-2r\cos\theta, -2r\sin\theta, 1).$$

Dermed er

$$dS = \left|\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right)(r,\theta)\right| dr\,d\theta = r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta$$

slik at arealet av flaten er gitt ved

$$A = \iint_{\mathcal{S}} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\int_1^{17}\sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$$

der den nest siste likheten fremkommer ved å benytte substitusjonen $u = 1 + 4r^2$.

$\boxed{8}$ La $F_1(x,y) = x^3 - y$ og $F_2(x,y) = x + y^3$ slik at $\mathbf{F}(x,y) = \left(F_1(x,y), F_2(x,y)\right)$. Greens teorem gir i vårt tilfelle at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = 2\iint_R dA$$

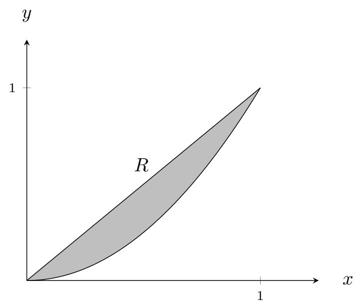
der R er området i xy-planet hvis rand er $\mathcal{C}$, det vil si, $\partial R = \mathcal{C}$.

Området R er beskrevet ved $x^2 \leqslant y \leqslant x$ og $0 \leqslant x \leqslant 1$. Dermed er

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^x dy\, dx = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \frac{1}{6}$$

slik at

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2 \iint_R dA = \frac{1}{3}.$$



9 I vårt tilfelle er

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 2xy - 2xy + 6z = 6z.$$

Divergensteoremet gir så at

$$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 6 \iiint_T z\, dV = 0$$

der ∂T er randen til T og hvor den siste likheten følger på grunn av symmetri.

Randen til T, ∂T, består av tre flater: $\mathcal{S}_{xz}$, $\mathcal{S}_{yz}$ og $\mathcal{S}$. Flaten $\mathcal{S}_{xz}$ er den delen av sirkelskiven $x^2 + z^2 \leqslant 4$ der $x \geqslant 0$ og $y = 0$, og flaten $\mathcal{S}_{yz}$ er den delen av sirkelskiven $y^2 + z^2 \leqslant 4$ der $x = 0$ og $y \geqslant 0$. For $\mathcal{S}_{xz}$ vil $\widehat{\mathbf{N}} = -\mathbf{j}$ og for $\mathcal{S}_{yz}$ vil $\widehat{\mathbf{N}} = -\mathbf{i}$.

Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}_{xz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\, dS = -\iint_{R_{xz}} (z - xy^2)\, dx\, dz = -\iint_{R_{xz}} z\, dx\, dz = 0$$

der R_{xz} er projeksjonen av $\mathcal{S}_{xz}$ inn i xz-planet og hvor den andre likheten fremkommer ved å utnytte at $y = 0$ på $\mathcal{S}_{xz}$ og den siste likheten fremkommer ved symmetri.

Videre så er

$$\iint_{\mathcal{S}_{yz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i})\, dS = -\iint_{R_{yz}} (x^2 y + y^2)\, dy\, dz = -\iint_{R_{yz}} y^2\, dy\, dz$$

der R_{yz} er projeksjonen av $\mathcal{S}_{yz}$ inn i yz-planet og hvor den siste likheten fremkommer ved å utnytte at $x = 0$ på $\mathcal{S}_{yz}$. Ved å innføre polarkoordinater $y = r\cos\theta$ og $z = r\sin\theta$ følger det at

$$\iint_{R_{yz}} y^2\, dy\, dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \cos^2\theta\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\theta\, d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 2\pi.$$

Altså er

$$\iint_{\mathcal{S}_{yz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i})\, dS = -2\pi.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS &= \iint_{\mathcal{S}_{xz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\, dS + \iint_{\mathcal{S}_{yz}} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{i})\, dS + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS - 2\pi = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = 0 \end{aligned}$$

slik at

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = 2\pi.$$

10 Hvis funksjonen skal være kontinuerlig i $(0, 0)$ må

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Legg merke til at

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{1}{3}$$

for $x \neq 0$, mens
$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$$
for $x \neq 0$. Altså kan ikke grenseverdien
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2}$$
eksistere. Dermed er ikke funksjonen kontinuerlig i $(0,0)$.